

TMD 基本設計プログラムの紹介

木場 和義¹⁾ 新田 吉伸²⁾ 細見 雅生³⁾

TMD(Tuned Mass Damper) は、機械工学の分野では動吸振器ともいわれ、パッシブ型の代表的な制振装置である。近年、橋梁の支間の長大化や大型化に伴い、風による振動が問題となることが多くなってきている。風による振動のうち、限定振動の振動制御を目的とする場合には、機構的に安定度の高いTMDがよく使用されている。このことから、橋梁の計画、設計段階で TMD の検討を必要とする場合は今後も増えるものと考えられる。

今回、風による限定振動の制振を目的としたTMDを対象として、その性能を簡便に検討し、構成部材である重錘、バネ、ダンパーの基本設計を行うプログラムの開発を行った。本プログラムでは、図を使用して計算結果を分かり易く表示し、より簡易に設計が行えるように配慮している。ここでは、このプログラムの概要と使用例を紹介する。

まえがき

近年、構造物の長大化、高層化によって風や地震および交通による振動が問題となる場合が多くなってきている。このような振動を制御（制振）する方法として、構造物に減衰を付加するか、あるいはアクチュエーターによる制御力を機構的に作用させて制御する構造力学的手法がよく用いられている。

構造力学的制振装置は、パッシブ型（受動型）とアクティブ型（能動型）およびハイブリッド型（複合型）に大きく分けられる。これらのうちパッシブ型の制振装置は、フラッターや地震動のように構造物を瞬時に破壊する振動に対してではなく、振動が使用者の感覚的に問題となる場合や、建設時の作業安全性あるいは部材の疲労が問題となる場合に、その振幅を低減させるために使用されることが多い。

TMD(Tuned Mass Damper)は、機械工学の分野では動吸振器ともいわれ、パッシブ型の代表的な制振装置である。これは、重錘の周期を構造物に同調させた時の共振現象による重錘の慣性力によって振動振幅の低減を図る制御方式である。現

在TMDは、風による振動が発生するような長大橋の橋桁や、斜張橋・吊橋の塔および煙突などの塔状構造物および高層建築物で利用されている。さらに、交通振動の低減の目的でも利用されている。またTMDは、比較的構造が単純であり設置スペースやメンテナンスの面で有利であるため、今後も利用される機会が増えていくと考えられる。

今回、風による限定振動の制振を目的としたTMDを対象として、その性能を簡便に検討し、構成部材である重錘、バネ、ダンパーの条件を決めるプログラムの開発を行ったので紹介する。

1. TMDの理論

TMDは、図-1に示すように重錘(質量 m_2)とダンパー(減衰係数 c_2)、バネ(バネ係数 k_2)の3つの要素により構成される。この装置は、TMDの重錘の周期を構造物に同調させて重錘に共振現象を発生させ、その慣性力によって振動低減を図る制御方式である。このTMD装置を、制振を行いたい構造物に設置することによって、発生する振動の制御を行う。

図-1のように、塔状構造物にTMDを設置して

1) 大阪設計部設計二課 2) 大阪設計部設計一課 3) 技術開発室次長

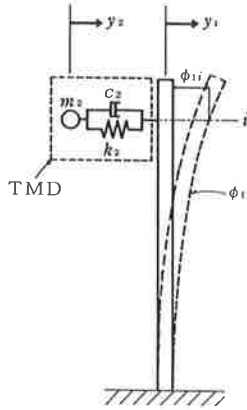


図-1 TMDのモデル図

制振する場合について考える。

一般的に、このような構造物は複数の固有モードで振動する多自由度モデルとして扱われる。制振対象モードとして、ある振動モードに着目した場合の本体の変位は、

$$Y = \{\phi_1\} y_1 \quad (1)$$

$\{\phi_1\}$: 固有ベクトル (ある振動モードに着目)
 y_1 : 一般座標

と表される。格点 i に設置された TMD 重錘の変位を y_2 とすると、主構造の運動方程式は次のようになる。

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} + KY - \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_2(\dot{y}_2 - \phi_{1i}\dot{y}_1) + k_2(y_2 - \phi_{1i}y_1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = P \quad (2)$$

また、TMD 重錘の運動方程式は次式のようにになる。

$$m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (\dot{y}_2 - \phi_{1i} \dot{y}_1) + k_2 (y_2 - \phi_{1i} y_1) = 0 \quad (3)$$

式(2)に $\{\phi_1\}^T$ をかけると、

$$\{\phi_1\}^T M \{\phi_1\} \ddot{y}_1 + \{\phi_1\}^T C \{\phi_1\} \dot{y}_1 + \{\phi_1\}^T K \{\phi_1\} y_1 - \{\phi_1\}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_2(\dot{y}_2 - \phi_{1i}\dot{y}_1) + k_2(y_2 - \phi_{1i}y_1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \{\phi_1\}^T P \quad (4)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \{\phi_1\}^T M \{\phi_1\} &= m_1 : \text{制振対象モードの換算質量} \\ \{\phi_1\}^T C \{\phi_1\} &= c_1 : \text{換算減衰係数} \\ \{\phi_1\}^T K \{\phi_1\} &= k_1 : \text{換算バネ係数} \\ \{\phi_1\}^T P &= P_1 : \text{換算外力} \end{aligned}$$

とおくと、式(4)は次式のようにになる。

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 - c_2 (\phi_{1i} \dot{y}_2 - \phi_{1i}^2 \dot{y}_1) - k_2 (\phi_{1i} y_2 - \phi_{1i}^2 y_1) = P_1 \quad (5)$$

式(3)と式(5)を合わせてマトリックス表示にすると、

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \phi_{1i}^2 & -c_2 \phi_{1i} \\ c_2 \phi_{1i} & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 \phi_{1i}^2 & -k_2 \phi_{1i} \\ -k_2 \phi_{1i} & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式(6)は2自由度の運動方程式である。

以上より、多自由度系においても振動対象モードを特定した場合には、対象モードとTMDの2自由度モデルで表されることがわかる。今回開発したプログラムでは、この方程式を周波数応答関数を用いて解いている。正弦波外力 P_1 が作用したときの主構造およびTMDの変位 y_1, y_2 は振幅を Y_1, Y_2 、主構造の変位に対するTMD重錘変位の位相遅れ θ_1 、外力の振動数 ω とすると次式のように表される¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= Y_1 \cos \omega t \\ y_2 &= Y_2 \cos(\omega t - \theta_1) \end{aligned} \right\} (7)$$

式(7)の振幅 Y_1, Y_2 は、主構造およびTMD重錘の絶対変位である。TMDの設計のためには、主構造の変位に対するTMD重錘の相対的な変位を知る必要があるが、この相対変位の振幅 (Y_2^*) は次式で計算される。

$$Y_2^* = \sqrt{Y_2^2 + (\phi_{1i} Y_1)^2 - 2\phi_{1i} Y_1 Y_2 \cos \theta_1} \quad (8)$$

Den Hartogは、主構造系の減衰を無視した2自由度系について解き、TMDを設置した主構造の変位振幅を無次元化した式を示している²⁾。

$$\frac{Y_1}{Y_{st}} = \frac{(2\frac{c_2}{c_0}g)^2 + (g^2 - \alpha^2)^2}{(2\frac{c_2}{c_0}g)^2(g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + \{\mu\alpha^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - \alpha^2)\}^2} \quad (9)$$

ここで、

- $\mu = m_2 / m_1$ 質量比
(TMD 重錘質量 / 主構造質量)
- $\omega_2 = \sqrt{k_2 / m_2}$ TMDの固有振動数
- $\omega_1 = \sqrt{k_1 / m_1}$ 主構造の固有振動数
- $\alpha = \omega_2 / \omega_1$ TMDの振動数比
- $g = \omega / \omega_1$ 強制振動外力の振動数比
- $Y_{st} = P_1 / k_1$ 主構造の静的変位
- $c_0 = 2m_1 \omega_1$ 臨界減衰

図-2は式(9)において、あるTMDの振動数比(α)と質量比(μ)の条件で、減衰比(c_2 / c_0)を変えた場合の外力の振動数比(g)と振幅倍率(Y_1 / Y_{st})の関係(共振曲線)を比較した図である。減衰の効果は、振動時の運動エネルギーを減衰エネルギーとして熱に変換して逸散し、共振振幅を抑制して共振曲線をなだらかにすることである。

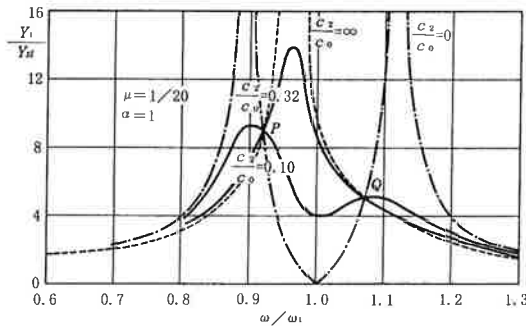


図-2 2自由度系の変位共振曲線の例

図より、 $c_2 = 0$ の場合は減衰力は0で仕事(減衰力と変位の積)はせず、共振振幅は無限大となる。また、 $c_2 = \infty$ の場合はTMDの重錘が主構造に固く結合させられた状態であり、この場合も仕事をせず、共振振幅は無限大となる。そして、 c_2 が0と ∞ の間の場合では減衰作用があり、減衰による仕事は最大となって共振振幅が最小となる最適減衰比がある。また、全ての共振曲線は、減衰比に無関係に図中のP点、Q点の2点を通っているが、振動数比を変えるとP、Qの2点の内、一方が上がり、他方が下がることになる。

これらより、共振振幅が最小となるのは、P点とQ点の図中の高さが同じであり、共振曲線がどちらか一方の点を水平に通る状態のときである。つまり、P点とQ点の大きさが同じになるように振動数比を求め、P点またはQ点における共振曲線の接線の傾きが0となるように減衰比を求めれば、減衰効果は最大となり、共振振幅は最小となる。このときの振動数比および減衰比を最適振動数比(α_{opt})、最適減衰比($(c_2 / c_0)_{opt}$)という。

以上より、最適振動数比と最適減衰比は次式で与えられる。

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (10)$$

$$\left(\frac{c_2}{c_0}\right)_{opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad (11)$$

このときの振幅倍率は次式で与えられる。

$$\frac{Y_1}{Y_{st}} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \quad (12)$$

以上のように、ある質量比(μ)のTMDにおける最適な振動数と減衰係数を理論的に求めることが可能である。

2. TMD性能検討のための計算方法

(1) 考慮する条件

前節で示しているように、構造物およびTMDの製作に誤差および制限がなければ、ある質量比(μ)を設定すれば理論的な最適振動数比およびTMDの最適減衰率が使用できる。しかし、現実には種々な誤差と制約があるため、これらの条件を考慮した設計が必要になる。

実際にTMDを設計するためには、下記のような条件および誤差を考えておく必要がある。

①質量比(μ)

設計の初期条件として与える。本体質量の推定誤差およびTMDの製作誤差による誤差を含む。

②振動数比(α)

構造物の固有振動解析をもとに振動数比を設

定するが、推定誤差が含まれる。現地でTMDをチューニングする際に、構造物の固有振動数を計測すれば精度は高くなるが、この場合でも計測誤差を含んでいる。

③ TMD 減衰率 (δ_2) の誤差

減衰器の製作誤差を考慮して設定する必要がある。

④ TMD 重錘の移動制限

TMDは、制振効果を大きくするほどTMDの重錘の移動量が大きくなる。装置の大きさから決まる移動量の制限を考慮して、TMDを設計する必要がある。

(2) 計算方法

TMDの基本設計は、主構造着目部の加速度とTMD重錘の移動量が目標値以下になるように、付加減衰(要求減衰率として風洞試験結果より得られる)を与える TMD 装置の仕様を、前記(1)の条件と誤差を考慮して設定することである。そのためには、2自由度の運動方程式を種々な条件を設定して解く(等価減衰(付加減衰)と本体、TMD それぞれの振幅を求める)必要がある。

2自由度の運動方程式を解く方法には下記のものと考えられる。

①基本方程式(式(6))を複素固有値解析によって直接解く方法

(解として計算される複素振幅より、等価減衰と主構造およびTMD重錘の振幅を求める)

②2自由度強制振動の周波数応答関数を用いる方法

③簡易算出式を導いて使用する方法³⁾

①, ②は条件の組み合わせを複数設定して運動方程式を解く必要があるが、計算時間は同程度と考えられる。また、2自由度の運動方程式を直接解くことから③の方法に比較して精度は高い。最近の電算機の高性能化と普及から考えて、①, ②の方法は十分実用可能と考えられる。本プログラムでは、理論式の適用の分かり易さを考慮して②の方法を使用することにした。

3. プログラムの内容

(1) 概要

TMDの条件決定は理論的には2自由度の運動方程式を解くことに帰着するが、構造物により制

約条件は個別であり、単純には扱えなくなっている。このことが、TMDの性能検討を複雑にしているものと考えられる。本プログラムでは図を使用して分かり易く表示し、より簡易に計算が行えるよう配慮した。

本プログラムで扱う制振条件は以下のとおりである。

①構造物の着目位置における制振目標加速度

目標加速度から計算した要求振幅をもとに、風洞試験の結果(図-4)を用いて要求減衰率(δ_d)をプログラム内で計算する。よって、風洞試験の結果が必要である。

② TMD の移動量の制限値

③有効質量比 (μ) とその許容誤差

④振動数比 (α) の許容誤差

⑤ TMD の減衰率 (δ_2) の許容誤差

(2) プログラムのフローチャートと内容

本プログラムは α, μ, δ_2 の条件を順次設定して2自由度の運動方程式を解き、各ステップで使用される計算結果を図として出力する。最終的には μ の制限値のもとでの要求制振率 (δ_d) と TMD 重錘の移動量 (A_2) の制限条件を満たす δ_2 と α の範囲を図化し、これらの設定誤差を考慮して TMD の性能を決定する。

入力項目を表-1に、プログラムのフローチャートを図-3に示す。以下に本プログラムの特徴などを列記する。

表-1 入力ファイルの内容

内 容	記 号
主構造の節点数と節点番号	—
主構造の固有振動数と構造減衰(対数減衰率)	f_1, δ_1
主構造格節点の節点質量	$m_k, k=1\sim n$
主構造各節点のモード値	$\phi_{1k}, k=1\sim n$
TMDを設置する節点番号とその位置のモード値	i, ϕ_{1i}
外力振動数の最大値と分割数	ω
TMD減衰(対数減衰率)の最大, 最小と分割数	δ_2
有効質量比の最大, 最小と分割数	μ
振動数比の最大, 最小と分割数	α
主構造の要求振幅(目標加速度からTMD設置位置の振幅を計算)	$A_{1, req}$
主構造の構造減衰と限定振動振幅の実験式の係数($\log A = a \log \delta_1 + b$)	a, b
TMD重錘の移動制限値	$A_{2, max}$
有効質量比の制限値	μ

- ① まず、風洞試験の結果より限定振動の振幅 A と構造減衰 δ_1 の近似曲線を作成する。

$$\log A = a \log \delta_1 + b \quad (13)$$

ここに a , b は近似曲線の定数である。

- ② 構造物本体の分布質量およびモード値を入力し、内部で等価質量を計算する。モードの正規化は最大値を1とする方法、一般化質量を1とする方法のどちらを使用してもよい。
- ③ 等価減衰 (δ_{eq}) は、TMDを設置した2自

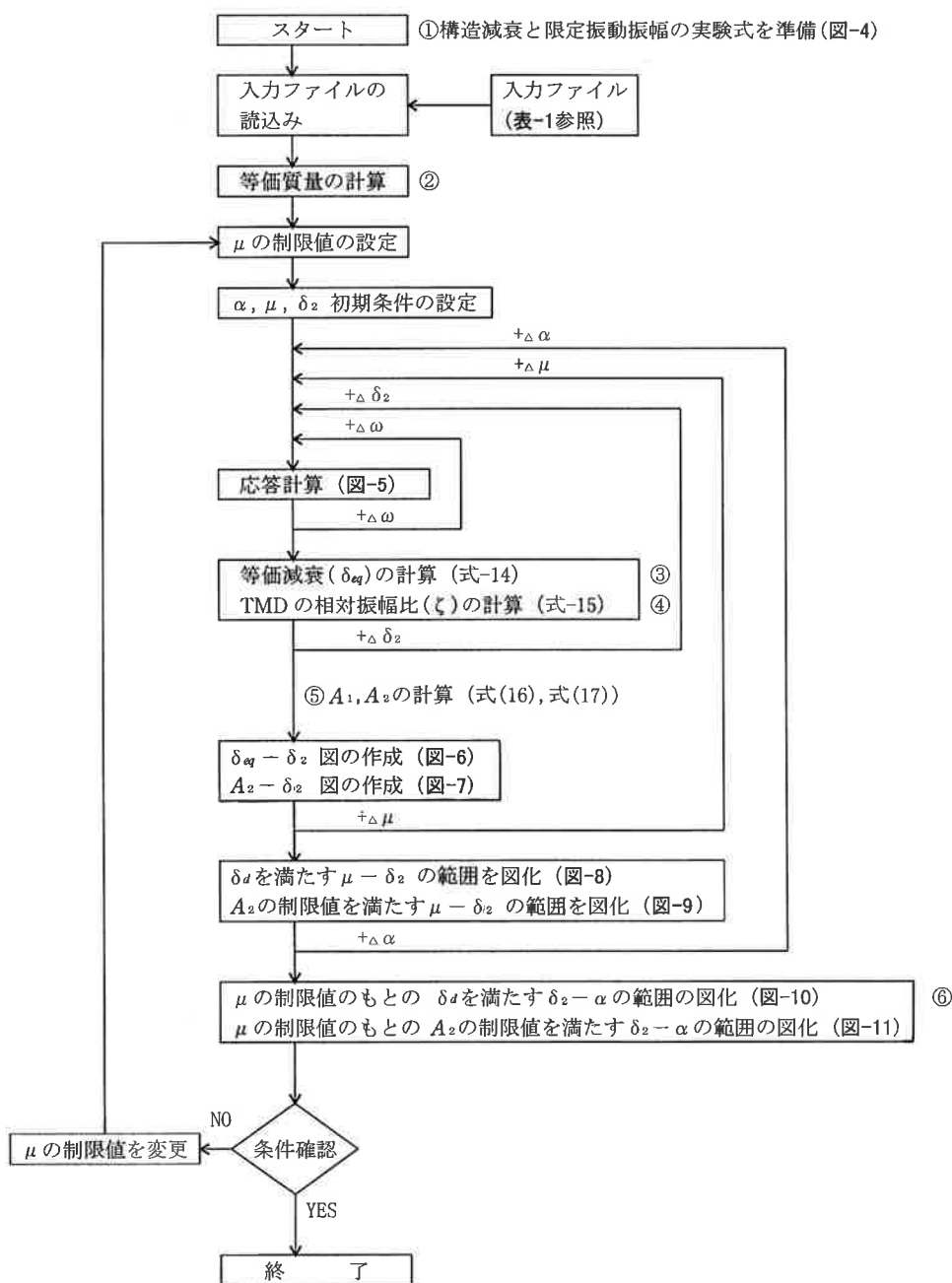
由度系の最大応答を等価な1自由度系の減衰に置き換えたものである。 δ_{eq} は、図-5に示す H_{max} を用いて、下式により計算する。

$$\delta_{eq} = \pi / H_{max} \quad (14)$$

- ④ 相対振幅比 (ζ) は式 (8) の Y_2^* と式 (7) より

$$\zeta = \frac{Y_2^*}{\phi_{1i} Y_1} \quad (15)$$

として求める。



※ 図中の①～⑥は、本文3.(2)節に対応している。

図-3 プログラムのフローチャート

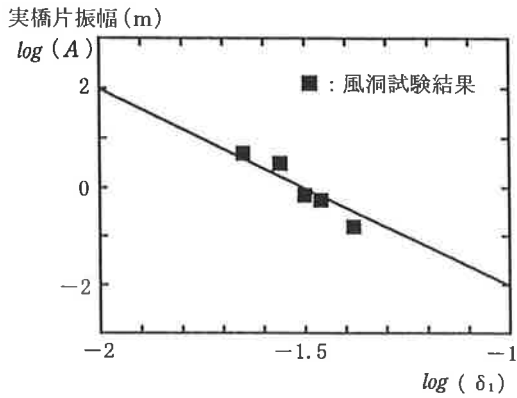


図-4 限定振動発生時の振幅と構造減衰の関係

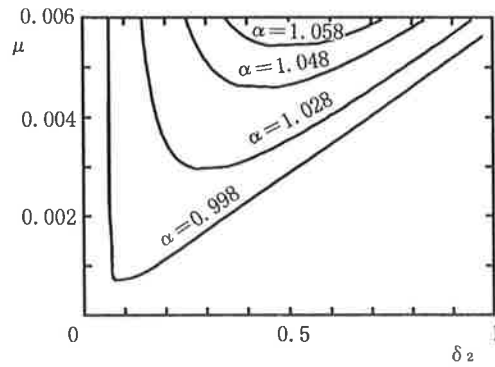


図-8 δ_dを満たす μ - δ₂の範囲

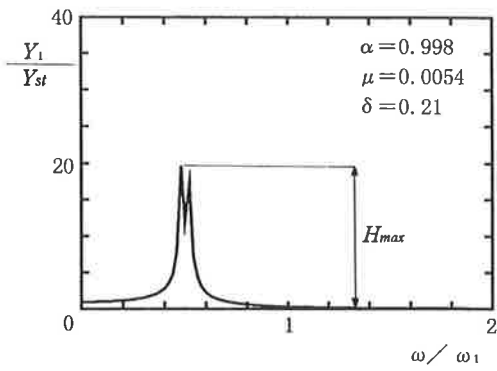


図-5 変位応答曲線

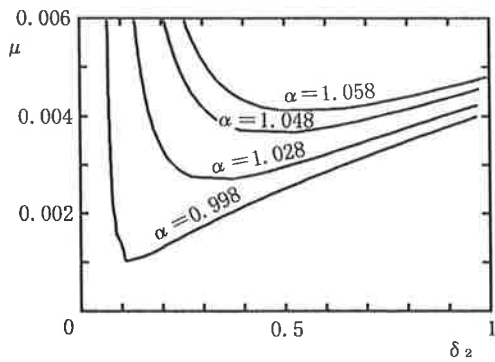


図-9 A₂の制限値を満たす μ - δ₂の範囲

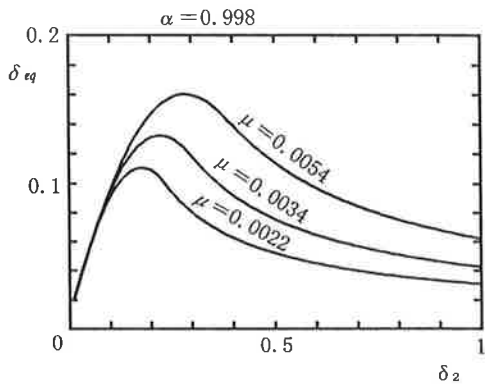


図-6 δ_{eq} - δ₂図

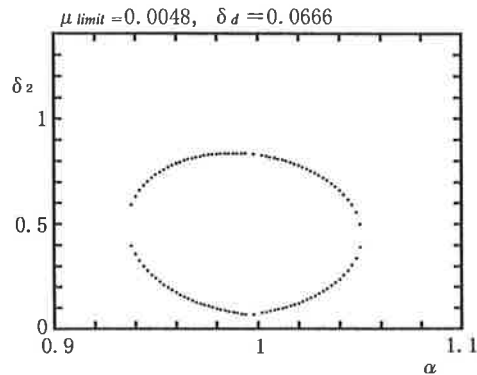


図-10 δ_dを満たす δ₂ - αの範囲

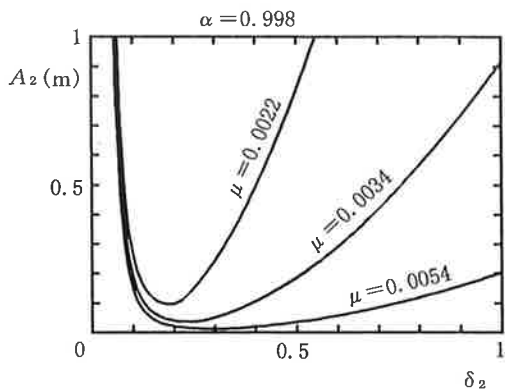


図-7 A₂ - δ₂図

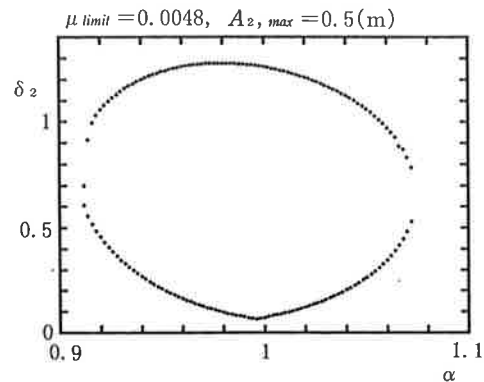


図-11 A₂の制限値を満たす δ₂ - αの範囲

- ⑤ 式(13)の δ_1 に δ_{eq} を代入し、 δ_{eq} 時の着目位置の限定振動の振幅 A_1 を求める。

$$A_1 = 10^{(a \log \delta_{eq} + b)} \quad (16)$$

A_1 に ζ を乗じて、限定振動時のTMD重錘の振幅 A_2 を求める。

$$A_2 = \zeta \cdot A_1 \cdot \frac{\phi_{1i}}{\phi_{10}} \quad (17)$$

ここで ϕ_{10} は、塔頂のモード値である。

- ⑥ μ の制限値のもとでの δ_d 、 A_2 の制限値を満足する δ_2 と α の範囲を求め、それぞれの許容誤差範囲に入っているかどうかをチェックする。条件が満足されない場合は μ を変更して計算を繰り返す。

4. 設計例

例として、架設時に独立状態となる斜張橋の塔における限定振動を制振するためのTMDを設計する。

(1) 制振条件

① 制振対象振動モード

塔独立時の面外1次モードを制振対象とする。

固有振動数 = 0.50 Hz

等価質量 = 10.3 tf·s²/m

② 目標加速度

目標加速度は塔頂部において50galとする。

③ 要求減衰率

目標加速度50galの時の面外1次振動(0.50 Hz)の振動片振幅(A)は、次式から5.07 cmとなる。

$$A \times (2\pi \times 0.50)^2 = 50 \quad \therefore A = 5.07 \text{ cm}$$

塔の構造減衰(δ_1)と限定振動の塔頂片振幅の関係として、風洞試験結果より得られた実験式を使用する。ここでは例として、

$$\log A = -4 \times \log \delta_1 - 6 \quad (18)$$

と仮定する。 $A = 0.0507\text{m}$ とするための減衰率(δ_1)は、上式に $A = 0.0507$ を代入して $\delta_1 = 0.0666$ となる。すなわち、塔頂加速度を50gal以下にするためには、要求減衰率 $\delta_d = 0.0666$ となる。

(2) その他の条件

構造物の振動条件の誤差、TMDの製作誤差および装置の大きさの制約などを考慮して下記の条件を設定する。

① 設置位置

TMDの設置位置は、面外1次モードに対して制振効果の大きい塔頂付近とする。

② 振動数比(α)の許容誤差

塔の固有振動数を振動解析の結果または振動実験から推定し、それに基づいてTMDの調整を行う。この時の調整の精度から、塔本体とTMDの振動数比の許容誤差は5%とする。

③ 減衰率(δ_2)の許容誤差

TMDを構成するダンパーの減衰率の許容誤差は、製作精度から15%とする。

④ 質量比(μ)の許容誤差

塔本体の質量の誤差は、通常5%以下であり、また、TMDの重錘部の製作誤差は、本体の質量に比べると微小な量である。よって、TMD重錘部の塔本体に対する質量比の許容誤差は5%とする。

⑤ 移動量(A_2)の制限

TMD重錘部の移動量の制限は、TMDをコンパクトにすることから、片振幅50 cmとする。

(3) 検討結果

図-12は、有効質量比(μ)を0.0048とした場合で、要求減衰率($\delta_d \geq 0.0666$)とTMD重錘の移動量($A_2 \leq 0.5\text{m}$)の条件を満足する振動数比(α)とTMD減衰率(δ_2)の範囲を示している。この図で、プロットの内側の領域が、要求減衰率と重錘移動量を満足する振動数比とTMD減衰率の領域である。また、振動数比の許容誤差を5%見込

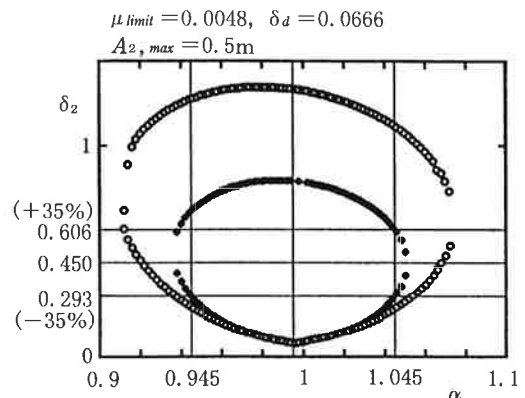


図-12 設計例

んだときのTMD減衰率の許容誤差範囲を図中に示している。

図より、有効質量比 $\mu = 0.0048$ の場合、振動数比の誤差を見込んだときのTMD減衰率は $\delta_2 = 0.450 \pm 0.156$ となり、許容誤差範囲は 35 % となっている。これは、TMD減衰率の許容誤差として 15 % を仮定した条件を満足している。

以上から、TMDの設計パラメータの目標値は表-2のようになる。

表-2 TMD設計パラメータ

有効質量比	μ	0.00480
構造物とTMDの振動数比	α	0.995
TMDの減衰率	δ_2	0.450

設定した設計パラメータを目標値とした時の制振効果を確認するために、主構造系の減衰率 (δ_{eq}) と TMD 重錘の移動量 (A_2) について調べた。許容誤差範囲を考慮して計算した結果、TMD重錘の移動量は0.254m以下、主構造系の等価減衰率は0.0672以上となり、設計条件を満足している (表-3)。

表-3 減衰率と移動量の予測値

	許容誤差範囲 内での最悪値	設計条件
主振動系の減衰率 δ_{eq}	0.0672	$\delta_{eq} \geq 0.0666$
TMDの移動量 A_2	0.254 (m)	$A_2 \leq 0.5$ (m)

以上の検討結果より、重錘部重量、バネ定数、ダンパー減衰係数を求めると以下ようになる。

計算条件

$$\mu = 0.0048, \quad \alpha = 0.995, \quad \delta_2 = 0.450$$

重錘部重量

$$10.3 \times 9.8 \times 0.00480 = 0.485 \text{ tf}$$

バネ定数

$$f_2 = 0.50 \times 0.995 = 0.498 \text{ Hz}$$

$$0.498 = \sqrt{k_2 / (10.3 \times 0.00480)} / (2\pi)$$

$$\therefore k_2 = 0.484 \text{ tf/m}$$

減衰係数

$$c_2 = \delta_2 \times \sqrt{m_2 \times k_2} / \pi$$

$$= 0.450 \times \sqrt{10.3 \times 0.00480 \times 0.484} / \pi$$

$$= 0.0222 \text{ tf}\cdot\text{s/m}$$

表-4に、TMDの制振条件と設計条件および検討結果をまとめる

表-4 TMD性能検討のまとめ

制振の条件	制振対象モード	面外1次 (0.500 Hz)
	塔の構造減衰 (δ_s) と限定振動振幅 (A) の実験式	$\log(A) = -4 \log(\delta_s) - 6$
	目標加速度	50 gal
	要求減衰率	0.0666
TMDの設計条件	TMDの設置位置	塔 頂
	振動数比 (α) の許容誤差	5 %
	減衰率 (δ_2) の許容誤差	15 %
	質量比 (μ) の許容誤差	5 %
移動量 (A_2) 制限	50 cm	
検討結果	重錘部の重量	0.485 tf
	バネ定数	0.484 tf/m
	減衰係数	0.0222 tf \cdot s/m

あとがき

従来、TMDの設計条件決定などは、膨大な数値計算が必要なこと、また、TMD装置が機械製品であることから、橋梁の設計担当者が直接設計条件を決めることは少なかったものと思われる。しかし、最近では支間の長大化などから、橋梁の計画、設計段階でTMDの検討を必要とする場合が多くなってきている。このような必要性を考慮し、今回、TMDの性能を簡易に検討できるプログラムを開発した。本プログラムは図を使用して計算結果を分かり易く表示し、より簡易に設計が行えるように配慮した。

現在、当社ではTMD装置の開発を進めている。本プログラムを含めてTMD装置関連の開発を積極的に行うことにより、振動制御の分野に寄与していきたいと考える。

参考文献

- 1) 小堀清真：土木振動学，pp.119-123，森北出版，1973.
- 2) Den Hartog (谷口・藤井 共訳)：機械振動論，pp.102-115，コロナ社，1960.
- 3) 堀内 博・藤澤伸光・津村直宣：TMDの設計における実用算定式，構造工学論文集，Vol.37A，pp.781-788，1991.3.