

Cable Control Systemの紹介（その1）

（立体有限変位解析プログラムの開発について）

有村 英樹¹⁾ 玉田 和也²⁾ 細見 雅生³⁾

Cable Control System (CCS) は、ケーブルを有する橋の架設精度管理を効率的に支援することを目的としたシステムである。本システムは主に斜張橋を対象としているが、ニールセン橋などのケーブルを有する橋梁に対しても適用できるシステムを考えている。斜張橋はその構造が合理的な橋梁といわれており、本四架橋などいくつかの大型プロジェクトでも多く採用されている形式である。この斜張橋の製作、架設にあたっては高い精度の管理だけでなく、経済性を考慮した効率的な管理が要望される。このような背景を考慮し、斜張橋などのケーブルを有する橋の施工管理を効率的に支援する施工管理システムの開発を計画し、開発に着手した。ここでは本システムにおける構造解析の核となる立体有限変位解析の概要、理論、数値解析手法等を報告する。

まえがき

斜張橋はその構造が合理的な橋梁といわれており、本四架橋などいくつかの大型プロジェクトでも多く採用されている。そして、最近の設計、解析、架設などの技術力の進歩により長大化、高精度化している。また、電算機器の進歩や社会情勢の変化から経済性を考慮したより効率的な管理への要望が高くなってきている。

このような背景を考慮して、有限変位解析、誤差要因推定解析等、最新の高度な構造解析法を取込んだケーブルを有する橋の施工管理を効率的に支援する斜張橋施工管理システムの開発を計画した。

中長規模の斜張橋など柔軟性に富む構造物で、非線形性の影響が大きいと考えられる場合には幾何学的非線形性を考慮した解析が必要である。特に吊橋や斜張橋の架設時においては変形が大きいことから非線形性が顕著に現れるため、有限変位理論に基づく解析は必要不可欠であるといえる。また最近の非線形解析の理論的な研究の進歩、EWSなどの電算機器の発達によって高速な電算処理が経済的に行えるようになってきた。このような状況から立体の有限変位解析を実際の設計、架設時の解析に使用し、より精度の高い解析を行うことが可能になってきている。

従来、立体の非線形解析には、NASTRAN、COSMOS/M等の汎用解析プログラムが用いられてきた。しかし、これらの解析プログラムの多くは解析の理論が明確に紹介されていない。そのため、有限変位解析のプログラムによる解析値に差があった場合、その相違の原因を把握しにくいという問題点があった。したがって、最近の研究成果に基づく立体有限変位解析プログラムを開発することにより今後、解析結果の照査、比較を容易にすることが必要である。

また、立体の有限変位解析を架設精度管理システムに適用するためには、独自の解析プログラムの開発は不可欠である。

1. 有限変位解析の概要

ここでは本システムで用いた有限変位解析の概要について説明する。

物体が外力の作用を受け、変形して釣合っている場合、物体は変形した状態で静止しているため、厳密に力の釣合いは変形後の状態で考えなければならない。この変位が物体内のすべての点で微小であれば、変形前後の状態を区別する必要がなくなるため、力の釣合いも変形前の状態で考えればよいことになる。この場合には、ひずみ-変位関係において、変位の微係数の非線形項をすべて無

1) 橋梁技術部技術課 2) 橋梁技術部技術課 3) 橋梁技術部技術課課長

視できることになる。このようにして得られる理論が微小変位理論である。

他方、発生するひずみは微小ではあるが、変位が微小ではないことを取り扱う理論が有限変位理論であり、ひずみの定義における変位の微係数の非線形項を無視できない理論である。ここで、微小変位理論と有限変位理論を分類すると表-1のようになる¹⁾。

表-1 微小変位と有限変位の比較

理論	微小変位	有限変位
並進変位	微小	微小
回転	微小	微小でない
ひずみ変位関係	線形	非線形

剛体の空間運動に関する基本的な性質より、有限な変位は、表-1で示したように並進変位と回転とに分けることができる。並進変位は、1つのベクトルとして表すことができるので、その取扱いについては問題はないが、回転の場合、有限変位理論においては微小でないものとして取扱う。この回転を合成する際、合成の順序を変えると結果が異なるため、可換則が成立しない。図-1に直方体の回転の例を示す。図に示すように、2回の回転の順序を変えると結果は全く異なることが解る。また、有限な回転は微小回転のようにベクトル的な合成はできない。そこで、立体有限変位解析には回転変位を合成するために回転行列を用いなければならない²⁾。

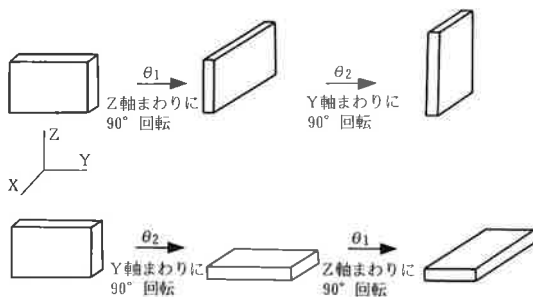


図-1 回転の合成

次に、解析モデルを使って解析の概念を示す。まず、微小変位解析では、ひずみ-変位関係は線形としているため、図-2のように、変形前の座標系で解析を行っている。一方、有限変位解析では、ひずみ-変位関係は非線形であり、構造物の

非線形性状としては図-3のようなタイプが挙げられる。同図を見てわかるように、特に1つの荷重値Pに対して2組以上の解が存在する場合があるなど、その解法には線形問題の手法をそのまま用いることができない。そこで、通常非線形問題の解析には増分法を用いた反復計算を行う³⁾。

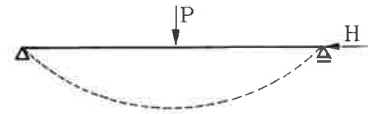


図-2 微小変位解析

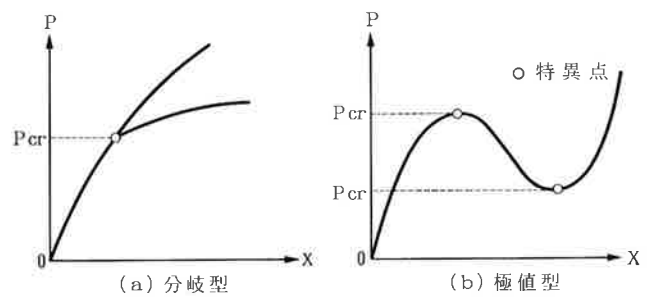


図-3 非線形問題の分類

増分法の解法概念を図-4に示す。同図は図-3で示した曲線を分割し、区分的に線形化した接線剛性の折線に置き換えて解く方法である。実際には線形化による誤差が累積して真の曲線から段々と離れていくので、本プログラムでは図の破線のような修正した方法を用いる。

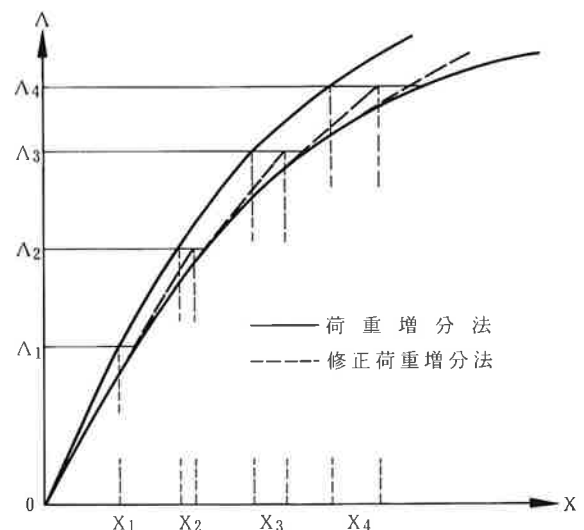


図-4 荷重増分法

図-2で示したモデルについて、有限変位解析における増分計算の手順を示すと図-5のように

なる。これは増分ステップ数を4ステップとし、1ステップでP/4, H/4ずつ荷重載荷する場合を示す。まず、Step-1において、P/4, H/4を載荷し、変形した状態で釣合うまで反復計算を繰返し、次のStep-2ではStep-1における変形後の釣合状態からさらにP/4, H/4を載荷し、次の変形後の釣合状態に収束するまで反復計算を行う。そして、以後同様にStep-3, 4と進む。これらのステップを微小変位解析と併せて荷重-変位曲線に示すと図-6のようになる。

このように、各ステップ毎に変形（並進，回転）が生じるので、これに対応した座標系への変換，剛性行列の更新，特に立体の有限変位解析では，前述の有限回転の合成を行う必要があり，線形解析に比較して非常に高度で複雑な解析手法であることが理解できる。

以下に本解析プログラムで用いた理論について説明する。なお，本手法は長岡技術科学大学林正教授らの有限変位理論に基づいている。

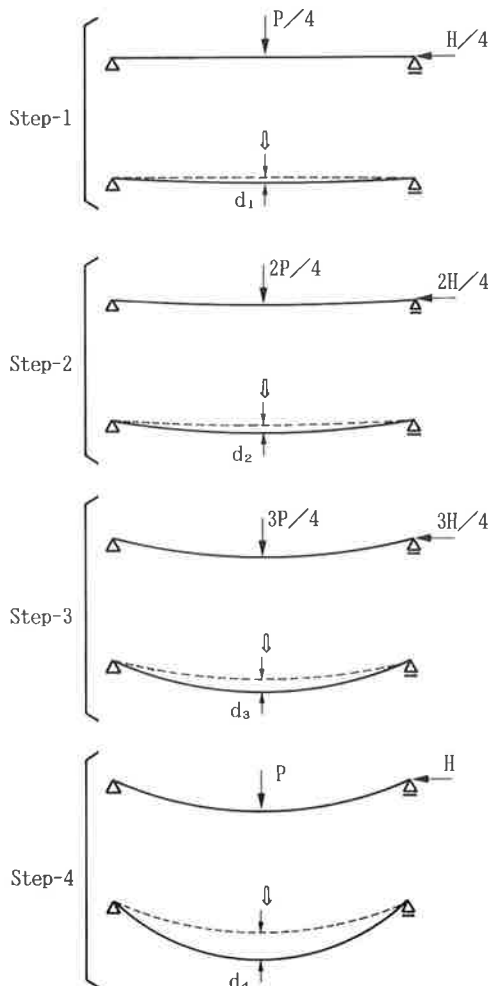


図-5 有限変位解析

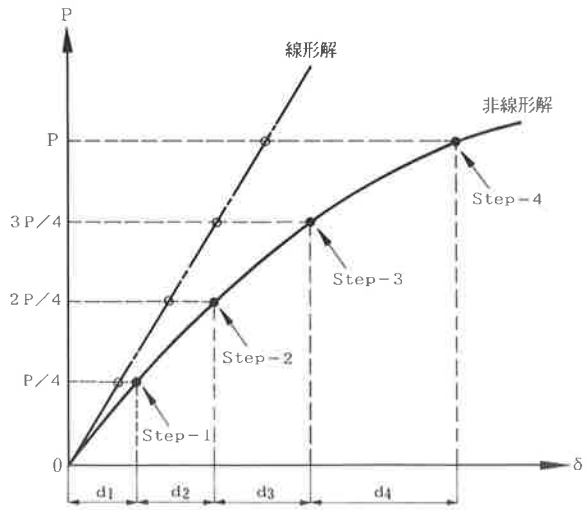


図-6 荷重-変位曲線

2. 有限回転と座標変換^{2) 4)}

(1) 回転行列，座標変換行列

先に立体の有限変位解析には回転変位を合成するために，回転行列を用いなければならないことを述べた。ここでは，有限変位解析を用いる回転行列，座標変換行列を示す。

変形前の部材座標系を (x, y, z) ，変形後の座標系を (x^*, y^*, z^*) とする。また， (x, y, z) を全体座標系に変換する行列を T_0 とし，変形後の座標変換行列を T^* とする。

まず，本プログラムで用いている座標変換行列 T^* は次式で与えられる。

$$T^* = R_a R_i T_0 R_\varphi = R_b R_j T_0 R_\varphi^T \quad (1)$$

ここに

R_i, R_j : 節点の有限回転に関する回転行列

R_a, R_b : 部材軸の回転に関する回転行列

R_φ : 部材の相対ねじれ角に関する回転行列

T_0 : 線形解析で用いる座標変換行列

式(1)のように T は変形前の既知量 T_0 と構造系全体の既知量である節点の座標値と回転 R_i, R_j から求められる，この T^* には部材の変形と剛体変位も考慮されており，正規直交性を完全に満たしている。

1) 節点の有限回転に関する回転行列 R_i, R_j

節点の有限変位について回転のみに着目すれば，剛体の回転に関するオイラーの定理により，節点はある空間ベクトル ϕ を回転中心軸として有限な角 α だけ回転する。

図-7に示すように，右手直交系 $(e_1, e_2,$

e_3) を e_3 の方向が ϕ に一致するように定め、節点に固定された任意のベクトル r を

$$r = r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 \quad (2)$$

と表せば、 ϕ を回転軸として角 α だけ回転した後のベクトル r^* は次式のようになる。

$$r^* = (r_1 \cos \alpha - r_2 \sin \alpha) e_1 + (r_1 \sin \alpha + r_2 \cos \alpha) e_2 + r_3 e_3 \quad (3)$$

上式に式 (2) を用いて次のように変形する。

$$r^* = \{ I \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) e_3 e_3^T + e_3 \times I \sin \alpha \} r$$

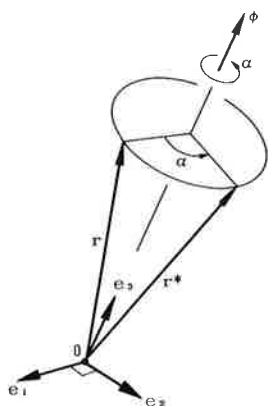


図-7 ベクトルの回転

ここで I は単位行列を示す。上式より式 (1) の回転行列 R_i は次式で与えられる。

$$R_i = I \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) e_3 e_3^T + e_3 \times I \sin \alpha \quad (4)$$

ただし、 R_j の算出式については R_i と同様のため省略する。

次に式 (4) の角 α の算出法を示す。上述の空間ベクトル ϕ の全体座標系の方向余弦を (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) とし、その大きさ $|\phi|$ が α に等しくなるように成分 $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ を定めると、次の関係式が成り立つ。

$$(\phi_x, \phi_y, \phi_z) = (\theta_x/\alpha, \theta_y/\alpha, \theta_z/\alpha) \quad (5)$$

$$\alpha^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2 \quad (6)$$

次に、より厳密な角 α の算出法を示す。まず、図-8 で示される回転行列 r による e_i 軸回りの回転角 θ_i を次のように求める。

$$\sin \theta_i = \frac{2 \phi_i \tan(\alpha/2)}{1 + \phi_i^2 \tan^2(\alpha/2)}$$

$$\therefore \tan(\theta_i/2) = \phi_i \tan(\alpha/2) \quad (7)$$

式 (7) により各軸回りの回転角と角 α との間にはベクトルの合成則が成立せず、次の関係式が得られる⁵⁾。

$$\sum_{i=1}^3 \tan^2(\theta_i/2) = \tan^2(\alpha/2) \quad (8)$$

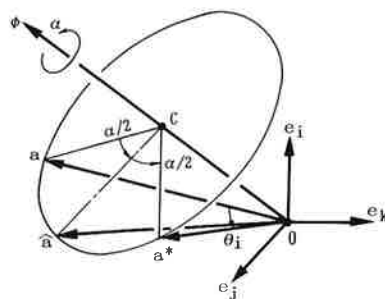


図-8 位置ベクトルの回転

2) 部材軸の回転に関する回転行列 R_a, R_b

図-9 に示すように、断面の図心点 a, b を結ぶ直線を考える。まず、 a 端において、図-9 (b) に示すように、変形後の図心点 a', b' を結ぶ直線上に単位ベクトル i_a^* をとり、 i_a となす角を α_a とする。そして i_a と i_a^* とに直交するベクトルを回転軸として、直交単位系 (i_a, j_a, k_a) を角 α_a だけ回転させ i_a を i_a^* に一致させる。このとき、 j_a と k_a はそれぞれ j_a^*, k_a^* になったものとする。この角 α_a による回転を表す回転行列 R_a は、次式のようになる。

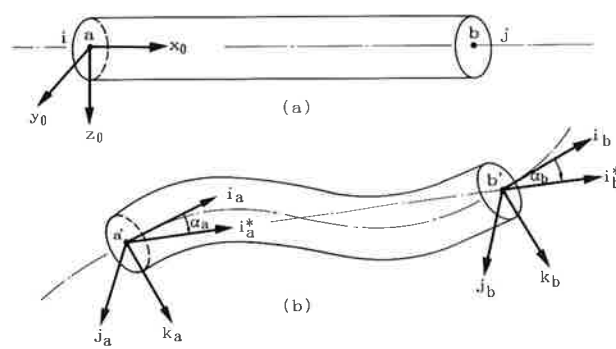


図-9 部材座標

$$R_a = (i_a \cdot i_a^*) I + \frac{(i_a \times i_a^*) (i_a \times i_a^*)^T}{1 + (i_a \cdot i_a^*)} + (i_a \times i_a^*) \times I \quad (9)$$

R_b の算出式については R_a と同様のため省略する。

3) 部材の相対ねじれ角に関する回転行列 R_ϕ

a 端、 b 端においてベクトル j_a^* と k_a^* および j_b^* と k_b^* がつくる平面は互いに平行であるから、図-10 に示すように、 j_a^* と j_b^* または k_a^* と k_b^* の間の角を ϕ^* とおくと、この角 ϕ^* が部材の相対ねじれ角になる。

このねじれ角 ϕ^* に関する回転行列 R_ϕ は次式で示される。

$$R_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (10)$$

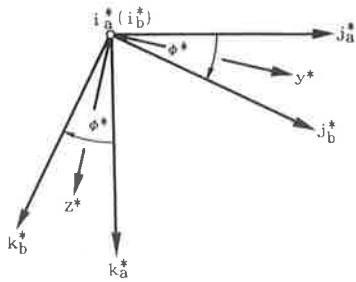


図-10 ねじれ角

4) 回転の合成

r_0 なる位置ベクトルが回転 R_1 によって r_1 になったとすれば、

$$r_1 = R_1 r_0$$

と表すことができ、引続いて n 回の回転 R_2, \dots, R_n 後のベクトル r_n は次のようになる。

$$r_n = R_n r_{n-1} = [R_n R_{n-1} \dots R_2 R_1] r_0 = R r_0 \quad (11)$$

この R が回転を合成した結果であり、1つの回転を表す。

一方、回転角 α が極めて微小な場合、微小回転ベクトル $\Delta\phi = (\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z)$ を用いると式(4)の回転行列は次式のようにになる。

$$\Delta R \doteq I + \Delta\phi \times I$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\theta_z & \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z & 1 & -\Delta\theta_x \\ -\Delta\theta_y & \Delta\theta_x & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

この微小回転に対する回転行列 ΔR を用いて回転を合成すると、微小回転角の2乗以上の項を省略した場合、ベクトルの合成則が成り立ち、行列は可換となる。

$$\Delta R_n \dots \Delta R_2 \Delta R_1 \doteq I + (\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 + \dots + \Delta\phi_n) \times I \quad (13)$$

$$\doteq \Delta R_1 \Delta R_2 \dots \Delta R_n \quad (14)$$

(2) 回転行列の合成の比較

ここでは、以上に述べた回転行列の合成式について比較、検証を行う。

回転行列である式(11)中の行列式 R の値は定義より1でなければならないが、式(4)の回転行列は厳密な式であるので、この行列式の値もまた1である。また式(11)を用いて合成された回転行列の積も正規直交行列となる。

この回転行列 R について、式中の角 α の算出法として、式(6)、(8)の2通りを示したため、

解法1: 式(8)による α の算出、回転の合成は式(11)

解法2: 式(6)による α の算出、回転の合成は式(11)

とする。一方、微小回転については、

解法3: 式(12)による ΔR の算出、微小回転の合成は式(13)

表-2 回転行列の行列式の値と各要素の値

	解法			$\Sigma \theta_R = 10.0^\circ$				$\Sigma \theta_R = 15.0^\circ$				
	解法 No.	使用式番号		$\Delta\theta = 0^\circ$		$\Delta\theta = 0.2^\circ$		$\Delta\theta = 0^\circ$		$\Delta\theta = 0.3^\circ$		
		R	Σ	参考文献	計算値	参考文献	計算値	参考文献	計算値	参考文献	計算値	
行列式の値	1	(8)	(11)		1.0000		1.0000		1.0000		1.0000	
	2	(6)	(11)	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
	3	(12)	(13)	1.0914	1.0914	1.0914	1.0914	1.2056	1.2056	1.2056	1.2056	
	4	(12)	(11)	1.0092	1.0092	1.0122	1.0114	1.0208	1.0208	1.0277	1.0258	
各要素の値	r_{11}	1	(8)	(11)		0.9698		0.9698		0.9326		0.9326
		2	(6)	(11)	0.9698	0.9698	0.9698	0.9698	0.9326	0.9326	0.9326	0.9326
		3	(12)	(13)	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.000	1.000
		4	(12)	(11)	0.9727	0.9727	0.9737	0.9734	0.9389	0.9389	0.9410	0.9405
	r_{12}	1	(8)	(11)		-0.1568		-0.1568		-0.2192		-0.2192
		2	(6)	(11)	-0.1568	-0.1568	-0.1568	-0.1568	-0.2192	-0.2192	-0.2192	-0.2192
		3	(12)	(13)	-0.1745	-0.1745	-0.1745	-0.1745	-0.2618	-0.2618	-0.2618	-0.2618
		4	(12)	(11)	-0.1590	-0.1590	-0.1597	-0.1595	-0.2248	-0.2248	-0.2266	-0.2261
	r_{13}	1	(8)	(11)		0.1870		0.1870		0.2866		0.2866
		2	(6)	(11)	0.1870	0.1870	0.1870	0.1870	0.2866	0.2866	0.2866	0.2866
		3	(12)	(13)	0.1745	0.1745	0.1745	0.1745	0.2618	0.2618	0.2618	0.2618
		4	(12)	(11)	0.1863	0.1863	0.1860	0.1861	0.2859	0.2859	0.2855	0.2856

R: 回転行列算出式 Σ : 回転行列合式

解法4：式(12)による ΔR の算出，微小回転の合成は式(11)

とした。以上の4ケースの合成を比較するため，数値を各々のケースに代入する。

回転角の3成分が等しい場合について，第k回目の回転角の成分を θ_k とし，これを10回続けて回転したときの合成結果を調べる。このとき，回転角の増分量 $\Delta\theta$ について次の2通りを考えた。

a) 各回の回転角を一定とする場合

$$\theta_k = \theta_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots, 10)$$

b) 各回の回転角を一定の増分量で増加させる場合

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \Delta\theta \quad (k=2, 3, \dots, 10)$$

表-2に合成された回転行列の行列式の値と各要素の値を示す。

まず，参考文献2)の提示値とは一致していることがわかり，本プログラムで用いている回転行列は理論通りプログラム化されていることが検証された。また，各解法の比較は解法1,2では，行列式の値，各要素の値とも一致しており， α の算出方法が変わっても行列式の計算には影響は出ない。次の解法3すなわち回転をベクトル的に扱った場合の誤差は行列式で9%~21%，要素で最大19%であるが，解法4のように式(11)により合成時において高次の微小項を省略しなければ，誤差は減少することがわかる。

3. 有限変位解析の仮定および剛性行列²⁾⁴⁾

本手法では空間骨組部材の幾何学的剛性行列を誘導するために次の仮定を用いている。

- ①骨組部材は横断面が一様な直線材とする。
また，薄肉断面部材の板厚は他の断面寸法に比べて十分小さいものとする。
- ②横断面の形状は不変とする。
- ③曲げおよび曲げねじりによるせん断変形は無視する。
- ④断面のそり変形は小さいものとして，そり関数の非線形項は無視する。
- ⑤応力とひずみの関係は線形である。

まず，エネルギー原理に基づいた剛性行列 k^* を用いて部材端力 f^* と一般化変位 d^* の関係式を示す。

$$f^* = [k^* (d^*)] d^* - p^* \quad (15)$$

ここに

f^* ：変位後の部材座標系で表された部材端力

d^* ：変位後の部材座標系で表された一般化変位

p^* ：中間荷重ベクトル

また，増分量に関する式は接線剛性行列 Δk^* を用いて次のようになる。

$$\Delta f^* = [\Delta k^* (d^*)] \Delta d^* \quad (16)$$

さらに k^* ， Δk^* は次のように表される。

$$k^* = k_0 + k_1^* (d^*) + k_2^* (d^*) \quad (17. a)$$

$$\Delta k^* = k_0 + 2 k_1^* (d^*) + 3 k_2^* (d^*) \quad (17. b)$$

式(17. a, b)において k_0 は線形項であり， k_1^* ， k_2^* はそれぞれ一般化変位 d^* の1次，2次の項を含む非線形項である。 k_0 ， k_1^* ， k_2^* の詳細については参考文献2)，4)に示されているので省略する。

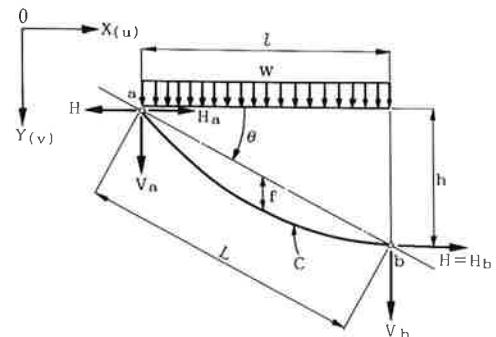


図-11 放物線ケーブル

次にサグによる非線形性を考慮した放物線ケーブル部材の方程式を示す。

図-11に示すように，変形後のケーブルの平衡状態を全体座標で考えて，X，Y方向の変位を u ， v で表す。非対称ケーブル ab に鉛直等分布荷重 w が作用するとき，次の基礎式が得られる。

$$\begin{aligned} H &= \frac{W}{8n}, \quad V_A = -\frac{W}{2} \left(1 + \frac{m}{4n}\right) \\ V_B &= -\frac{W}{2} \left(1 - \frac{m}{4n}\right) \end{aligned} \quad (18. a \sim c)$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{l}{16n} \left[\alpha \sqrt{1 + \alpha^2} + \beta \sqrt{1 + \beta^2} \right. \\ &\quad \left. + \log_e \{ (\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}) (\beta + \sqrt{1 + \beta^2}) \} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

ここに

H：ケーブル張力の水平成分

V_a, V_b ：ケーブルの両端 a, b に生じるY軸方向の材端力

C：変形後のケーブルの長さ

f, n ：ケーブルのサグとサグ比

l, h ：ケーブルの水平射影長と点 a に対する点 b の高低差

W：荷重の全重量

また、

$$\alpha = 4n+m, \beta = 4n-m \quad (20. a, b)$$

$$n=f/l, m=h/l, W=wl=const \quad (21. a\sim c)$$

次に材端力の増分 ΔF と材端変位の増分 ΔD および接線剛性行列 $[\Delta K]$ に関する平衡方程式について、結果のみを示すと次のようになる。

$$\Delta F = [\Delta K] \Delta D \quad (22)$$

ここに

$$[\Delta K] = T \cdot \Delta k \cdot T^T \quad (23. a)$$

$$\Delta F = \{\Delta H_a, \Delta V_a, \Delta H_b, \Delta V_b\}^T \quad (23. b)$$

$$\Delta D = \{\Delta u_a, \Delta v_a, \Delta u_b, \Delta v_b\}^T \quad (23. c)$$

$$\Delta k = \begin{bmatrix} k^* & -k^* \\ -k^* & k^* \end{bmatrix} \quad (24. a)$$

$$k^* = k \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (24. b)$$

$$a = \frac{C}{L} \quad (25. a)$$

$$b = \left(1 - \frac{C}{L}\right) - \frac{4W}{3EA} \left(\frac{l}{L}\right)n + \frac{40}{3} \left(\frac{l}{L}\right)^4 n^2 \quad (25. b)$$

Δk は弦を部材軸xとしたときの変位後の部材座標系で表されたケーブル部材の接線剛性行列である。

以上で示した式は、平面ケーブル部材についてのものであるので、本プログラムではこれらを立体解析用に座標変換して用いる。

4. 数値解法³⁾

非線形解析においては、増分法、反復法を用いる必要性について1.において既に述べた。そこで、本プログラムでは、連立非線形方程式の解法として、以下に示す反復法と増分法を併用した混合法を用いている。

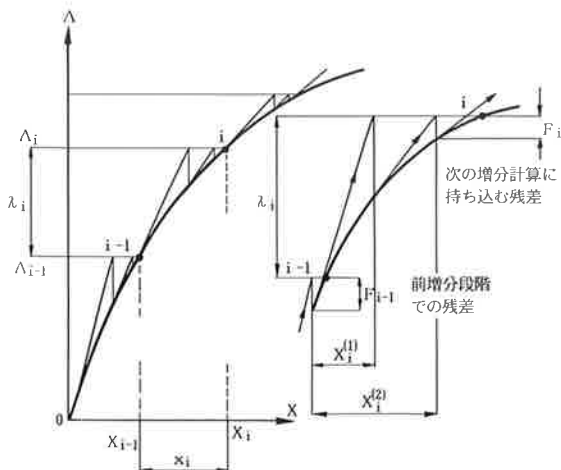


図-12 荷重増分法とニュートン法の組合せ

混合法 $\left\{ \begin{array}{l} \text{反復法} \cdots \cdots \text{ニュートン法,} \\ \text{修正ニュートン法} \\ \text{増分法} \cdots \cdots \text{荷重増分法, 変位増分法,} \\ \text{推定増分法} \end{array} \right.$

特に、構造解析では図-3のように荷重を徐々に増加した場合の解Xの値を求める場合があるので、増分法が必ず必要である。

増分法概念は、図-4で説明したように曲線を分割し、実線で示される区分的に線形化した方法から破線のような修正した方法を用いる。これは線形化による誤差が累積して、真の曲線から段々と離れていくため、本プログラムでは修正した方法(修正荷重増分法、変位増分法)を用いている。

上記のうち、荷重増分法では、既知のパラメータ Δ を数値計算の制御パラメータとして用いる。iステップ目の Δ の増分量を λ_i として荷重増分法とニュートン法を組合せた場合を示したものが図-12である。

一方、変位増分法では、未知変数Xのなかの適当な一成分 X_m をパラメータに選んで、計算を制御する方法である。よって計算では X_m を既知としてその増分量を入力データで与える。 X_m を Δ で表し、そのiステップ目の増分量を δ_i とにおいて、変位増分法とニュートン法を組合せた場合を示したものが図-13である。

最後に、ニュートンラプソン法と修正荷重増分法を併用した場合と同じくニュートンラプソン法と修正変位増分法を併用した場合のフローを示す(図-14, 15)⁴⁾。

同図の詳細な説明は省略するが、図-14, 15を比較してわかるように変位増分法において、荷重増分のパラメータ λ の計算部分さえ作成すれば荷重増分法の手法がそのまま使用できるため、本プログラムでは入力データにより荷重増分法と変位増分法の使い分けが可能としている。

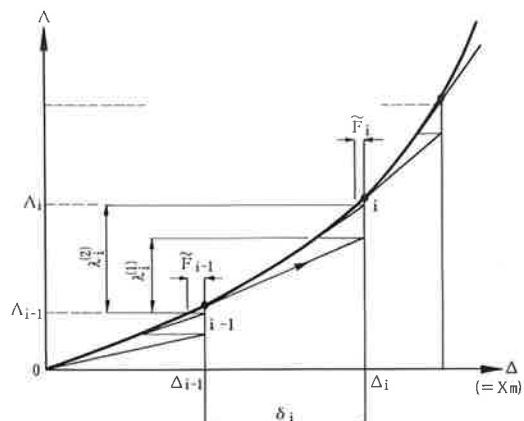


図-13 変位増分法とニュートン法の組合せ

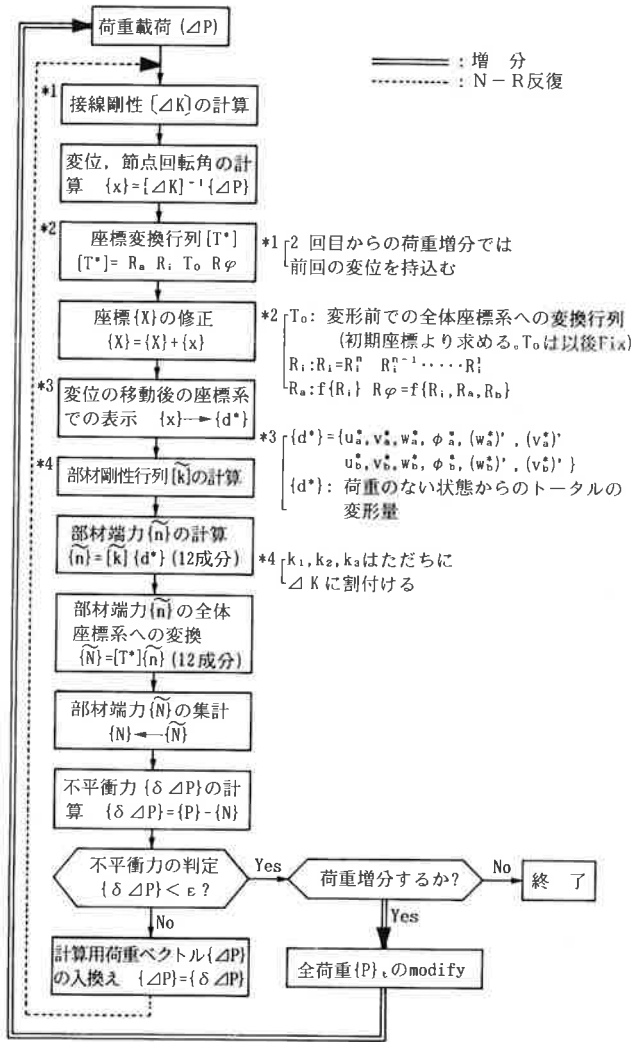


図-14 荷重増分法を用いた有限変位解析における収束計算の概略フローチャート

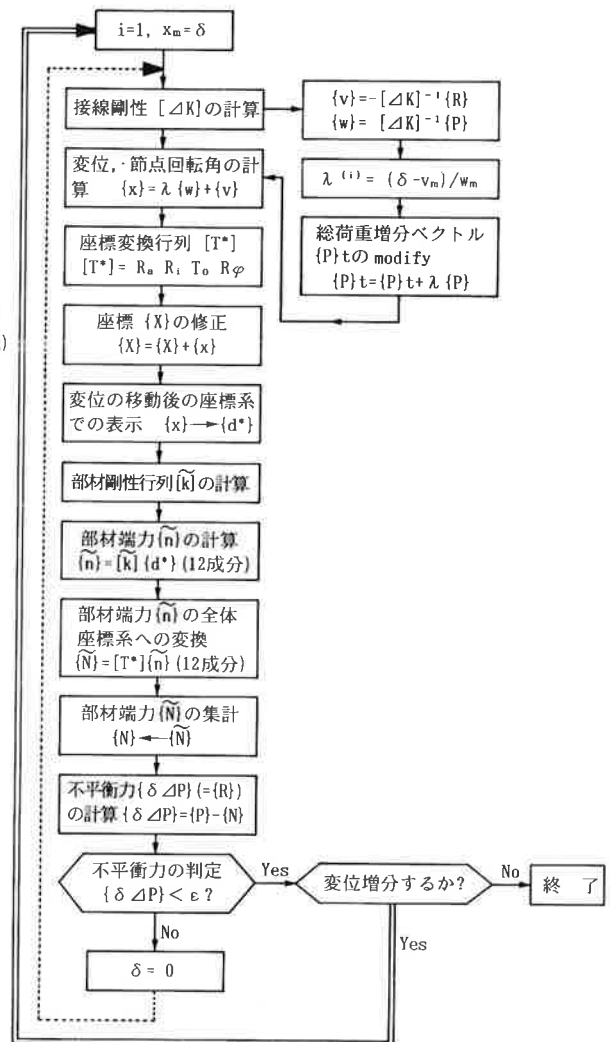


図-15 変位増分法を用いた有限変位解析における収束計算の概略フローチャート

5. 数値解析例

ここでは、2., 3. において示した非線形解析の精度を数値解析により検証する。

弾性有限変位解析例として、図-16に示すような2次の非線形項を省略することができない非線形性の強い問題であるエラスティカの問題を計算した。計算では、柱を20等分割し、自由端に全長の1/1000の初期 δ_0 を与えた。また、計算に用いた諸条件は以下の通りである。⁴⁾

$EA = 10^6, EI = 10^6$

座屈荷重 $P_{cr} = 61.685$

集中荷重 $P: P = 100$ まで荷重

$P = 0 \sim 50$: 一定増分量 10

$P = 50 \sim 100$: 一定増分量 1

許容誤差 $\epsilon = 10^{-3}$

全節点の面外自由度拘束

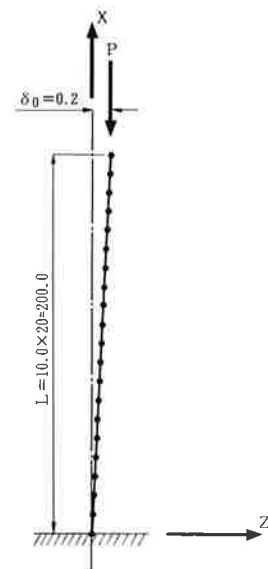


図-16 エラスティカ

数値解の精度を確認するため、計算値と自由端の変位を楕円積分により求める理論値⁶⁾を図-17に示す。また、理論値、計算値および参考文献4)での解析値を表-3に示す。

表-3より、理論値、参考文献の計算値とも良く一致しており、本プログラムによる有限変位解析の精度の高さが検証されたものと考えられる。

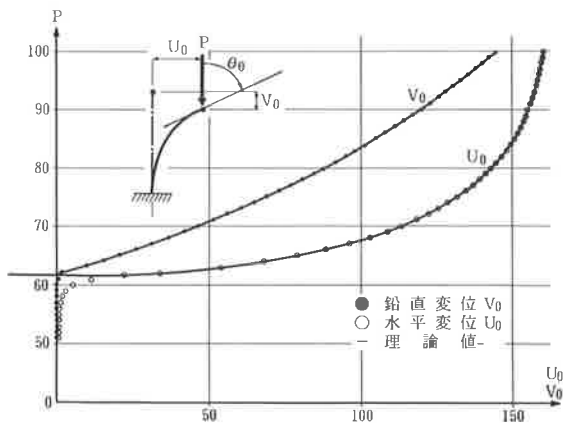


図-17 荷重点の荷重-変位曲線

表-3 数値解析結果

鉛直荷重P		66.00	70.00	80.00	90.00	100.00
水平変位 U ₀	理論値	88.39	113.80	144.04	155.95	160.40
	参考文献	88.38	113.72	143.91	155.78	160.20
	計算値	88.40	113.69	143.82	155.70	160.12
鉛直変位 V ₀	理論値	26.25	46.77	88.39	119.84	144.40
	参考文献	26.36	46.88	88.51	119.93	144.45
	計算値	26.41	46.90	88.46	119.89	144.41
たわみ角tan θ ₀		0.90397	1.5308	5.7521	-10.869	-3.4018

参考文献：参考文献4) 計算値
計算値：本プログラム計算値

最後に、本システムの開発にあたり、懇切なご指導をいただいた長岡技術科学大学 林正教授、岩崎英治助手、そして関係各位に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 土木学会：材料特性の数値モデル入門, 1989.
- 2) 前田幸雄・林正：立体骨組構造物の有限変位解析, 土木学会論文報告集, No. 253, pp.13-27, 1976.
- 3) 林正：多元連立非線形方程式の数値計算法, 長岡技術科学大学計算機センターニュース, Vol. 3, No.2, pp.3-18, 1985.
- 4) 林正：骨組構造の非線形解析と数値計算法に関する研究 (学位論文), 1984.
- 5) 林正：骨組構造の弾塑性有限変位解析, 長岡技術科学大学研究報告, No.8, pp.83-95, 1986.
- 6) チモシェンコ：座屈理論, コロナ社, 1954.

あとがき

今回開発した有限変位解析プログラムは、有限回転を考慮した座標変換行列、精度の高い非線形剛性行列を使用している。また、荷重増分法、変位増分法などの種々の数値計算手法が選択して使用できる機能を持たせている。そして、立体の有限変位解析の特徴である有限回転とエラスティカの問題による検証を行った。その結果から本プログラムによる解析値が十分な精度を有していることが確認できた。

現在、立体有限変位解析を組込んだ解体計算、最適シム量計算部等の開発を行っており、これらについては次回報告する。